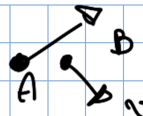


Vettore applicativo

vettore determinato da

Un vettore applicativi è definito così:

1) Punto di applicazione (A)
2) Direzione
3) Verso ($A \rightarrow B$)
4) Modulo (lunghezza $\|\vec{AB}\|$)

Insieme dei vettori applicativi del piano $\rightarrow V_e$

$u, v \in V_e$

"$u \sim v$"

è equipollente se u e v hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo

Valgono le seguenti proprietà: $\forall u, v, w \in V_e$

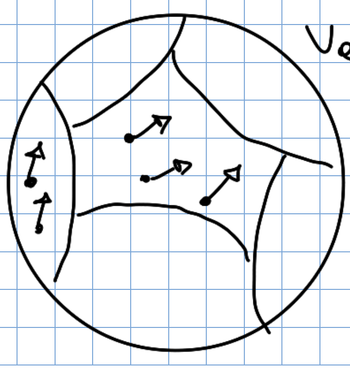
1) Riflessiva $u \sim u$ (u è equipollente a se stesso)
2) Simmetrica ($u \sim v \Rightarrow v \;\; u$)
3) transitiva ($u \sim v$ e $v \sim w \Rightarrow u \sim w$)

$$[u] = \{ v \in V_e : v \sim u \} \quad \text{con } u \in V_e$$

quindi se $u \sim w \Rightarrow [u] = [w]$

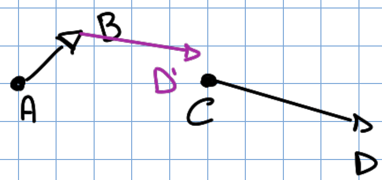
$u \nsim w \Rightarrow [u] \cap [w] = \emptyset$

non sono equipollenti



$V_e \rightarrow$ formato da sottoinsiemi a loro volta formati da vettori con lo stesso modulo, direzione e verso

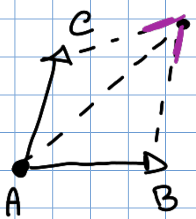
$V_g = \{ [v] : v \in V_e \} \to$ insieme di tutte le classi di equivalenza (vettori liberi)



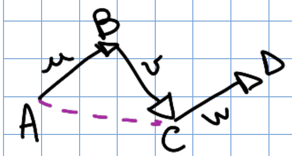
Sia D' l'unico punto del piano tale che $\vec{BD'} \sim \vec{CD}$

$[\vec{AB}] + [\vec{CD}] = [\vec{AD'}]$

Definizione della somma vettoriale per verificare che sia uno spazio vettoriale



(1) $\forall u, v \in V_g \quad u + v = v + u$



(2) $\forall u, v, w \in V_g \quad (u+v)+w = (v+w)+u$

perché:

$(u+v)+w = [\vec{AC}] + [\vec{CD}] = [\vec{AD}]$

$u+(v+w) = [\vec{AB}] + [\vec{BD}] = [\vec{AD}]$

(3) Esiste $\underline{0} \in V_g$ tale che $v + \underline{0} = v \quad \forall v \in V_g$

$\underline{0} = [\vec{AA}]$

(4) Per ogni $v \in V_g$ esiste $-v \in V_g$ t.c. $v + (-v) = \underline{0}$

$v = [\vec{AB}] \to -v = [\vec{BA}]$

Definizione del prodotto per uno scalare per verificare che sia uno spazio vettoriale

Definizione: Sia $v \in V_g$ e $\overset{\text{scalare}}{d} \in \mathbb{R}$ $\qquad d \cdot v = ?$

Se $d = 0$ oppure $v = 0 \to d \cdot v = 0$

altrimenti $d \cdot v$ è il vettore che ha

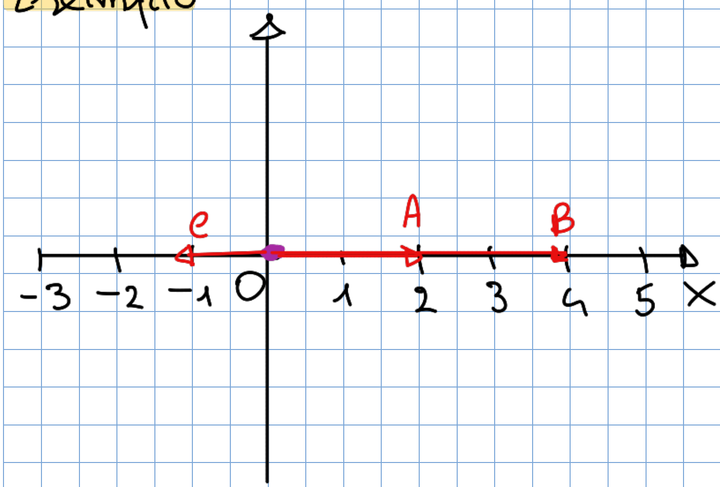
(1) Modulo: pari a $|d| \cdot ||v||$

(2) Direzione: La stessa direzione di v

(3) Verso: concorde con v se $d > 0$

Verso: discorde con v se $d < 0$

Esempio



$v = [\vec{OA}]$ → $(0;2)$

$2 \cdot v = [\vec{OB}]$ → $(0;4)$

$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot v = [\vec{OC}]$ → $(0;-1)$

Proprietà:

1) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in V_O$
2) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \bullet u + \beta \bullet u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u \in V_O$
3) $(\alpha \cdot \beta) \bullet u = \alpha \cdot (\beta \bullet u)$
4) $1 \cdot u = u \quad \forall u \in V_O$

$\cdot$ = moltiplicazione

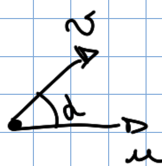
$\bullet$ = moltiplicazione con vettori in mezzo

Prodotto scalare

$u, v \in V_O$

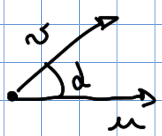
Se almeno uno dei vettori u e v è $\underline{0}$ → $u \cdot v = 0$

altrimenti $\underbrace{u \cdot v} = \|u\| \bullet \|v\| \bullet \cos\alpha$ → questo è un numero

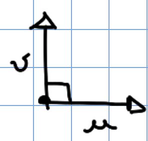


$0 \leq \alpha < \pi$

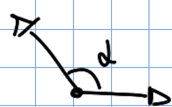
Con $u, v \in V_O / \{0\}$



Se $u \cdot v > 0$ allora formano un'angolo acuto



Se $u \cdot v = 0$ allora formano un'angolo retto

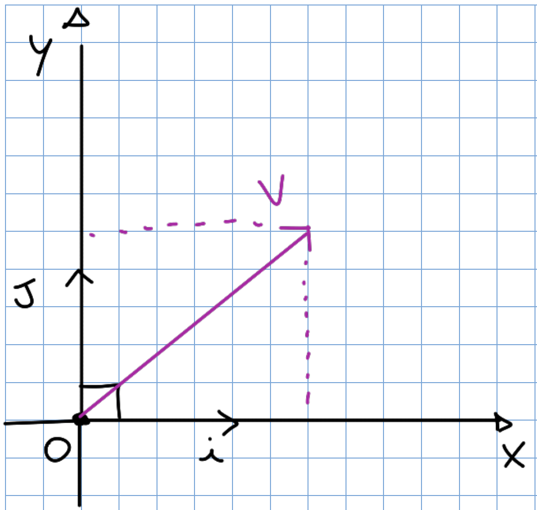


Se $u \bullet v < 0$ allora formano un'angolo ottuso

$u \cdot v = 0 \iff u$ e v sono $\underbrace{\text{ortogonali}}$ → formano un'angolo di $90°$

Proprietà

1) $u \cdot v = v \cdot u \quad \forall u, v \in V_O$
2) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad \forall u, v, w \in V_O$
3) $(\alpha \cdot u) \bullet v = \alpha \bullet (u \bullet v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in V_O$



Per ogni vettore libero $V \in V_p$ esistono e sono univocamente determinati $\underbrace{V_x, V_y}_{\text{sono numeri}} \in \mathbb{R}$ tale che $V = V_x \cdot i + V_y \cdot J$

$u, V \in V_p \to u = u_x \cdot i + u_y \cdot J$

$V = V_x \cdot i + V_y \cdot J$

prodotto scalare

$u \cdot v = (u_x \cdot i + u_y \cdot J) \cdot (V_x \cdot i + V_y \cdot J) =$

$= (u_x \cdot V_x)(J \cdot i) + \underbrace{(u_x \cdot V_y) \cdot J \cdot i}_{0} + \underbrace{(u_y \cdot V_x)^{J \cdot i}}_{0} + u_y \cdot V_y \cdot (J \cdot i) =$

$= u_x \cdot V_x + u_y \cdot V_y$

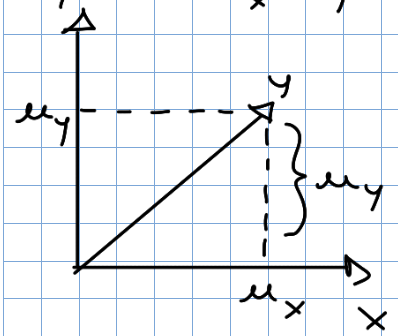
In questo modo posso trovare l'angolo tra 2 vettori

$u \cdot v = \|u\| \cdot \|V\| \cdot \cos \alpha$

$u \cdot v = u_x \cdot V_x + u_y \cdot V_y$

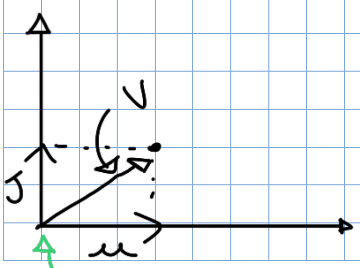
$u, v \in V_p \setminus \{0\}$ $\quad \cos \alpha = \dfrac{u_x \cdot V_x + u_y \cdot V_y}{\|u\| \cdot \|V\|}$

$\|u/v\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$



Esempio:

$u = i = (1, 0)$ $\quad V = i + J = (1,0) + (0,1) = (1,1)$



$\cos \alpha = \dfrac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

infatti $\cos \alpha$ è uguale ad $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $45°$

questo lo possiamo confermare anche graficamente

Prodotti vettoriali (Da in output un vettore)

$u, v \in V_O$

Se almeno uno tra u e v è $\underline{0}$ allora:

$$u \wedge v = \underline{0}$$

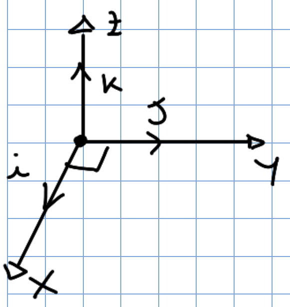
simbolo prodotto vettoriale

Altrimenti $u \wedge v$ è il vettore libero che ha:

1) Modulo pari a $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\alpha$
2) Direzione è quella perpendicolare al piano det da u e v
3) Verso determinato dalla regola della mano destra

Proprietà $\qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall u, v, w \in V_O$

1) anticommutativa: $u \wedge v = -v \wedge u$
2) distributiva: $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
3) $\alpha u \wedge v = \alpha(u \wedge v)$



versore dell'asse z

Def: $k = i \wedge j \rightarrow j \wedge k = i$

$k \wedge i = j$

$i \quad j \quad k \longrightarrow$

come ricordare

$i \wedge i = 0$

$u, v \in V_O \rightarrow u = u_x i + u_y j + u_z k$

$v = v_x i + v_y j + v_z k$

$$u \wedge v = u_x v_y k - u_x v_z j - u_y v_x k + u_y v_z i + u_z v_x j - u_z v_y i$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y) i - (u_x v_z - u_z v_x) j + (u_x v_y - u_y v_x) k =$$

$$= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

Piani

Equazione del piano π passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e ortogonale a $n = ai + bj + ck$.

$P(x,y,z) \in \pi \iff [\overrightarrow{P_0P}]$ è ortogonale a n

$\iff [\overrightarrow{P_0P}] \cdot n = 0 \iff [(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k] \cdot [ai + bj + ck]$
$= 0$

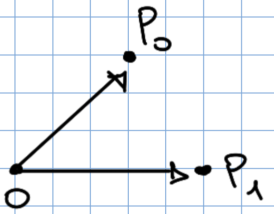
$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 \rightarrow \overbrace{ax + by + cz + d = 0}^{\text{equazione del piano}}$

Determinare l'equazione del piano passante per $(1,2,3)$ e ortogonale a $n = 3i + 5j + 7k$

$3 \cdot (x-1) + 5(y-2) + 7(z-3) = 0$

$O = (0,0,0) \qquad P_0 = (1,1,0) \qquad P_1 = (0,1,1)$



$\overrightarrow{OP_0} = (1-0) \cdot i + (1-0)j + (0-0) \cdot k = i + j$

$\overrightarrow{OP_1} = (0-0) \cdot i + (1-0)j + (1-0) \cdot k = j + k$

trovare l'equazione del piano π che passa per O, P_0, P_1

La normale di π è $n = \overrightarrow{OP_0} \wedge \overrightarrow{OP_1} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= i \cdot (-1)^{1+1} \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + j \cdot (-1)^{1+2} \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k \cdot (-1)^{1+3} \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= i - j + k$

Il piano passante per O e ortogonale a n:

$1 \cdot (x-0) - 1(y-0) + 1 \cdot (z-0) = 0$